Devoir maison n° 7 : Correction

Exercice 1. Optimisation du choix d'une place de parking (*d'après CCINP 2019*)
On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue. Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer près de l'arrivée.
Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0\,;1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.
Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).
On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

1. Donner l'univers-image de $X(\Omega)$.

Comme on commence à chercher une place à partir du numéro s et qu'on ne sait pas où cela peut finir, on a $\boxed{X(\Omega) = [\![s\,;+\infty[\![}$.

2. Déterminer la loi de X.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note L_i l'événement « la place numéro i est libre ». Soit $k \in [\![s\,;+\infty[\![$.

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(\overline{L_s} \cap \cdots \cap \overline{L_{k-1}} \cap L_k) \\
&= P(\overline{L_s}) \times \cdots \times P(\overline{L_{k-1}}) \times P(L_k) && \text{par indépendance} \\
&= (1-p) \times \cdots \times (1-p) \times p \\
&= p(1-p)^{k-s}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{X(\Omega) = [\![s\,;+\infty[\![\text{ et } \forall k \in X(\Omega),\ P(X=k) = p(1-p)^{k-s}}$.

3. Soit $Y = X - s + 1$. Montrer que Y est une loi géométrique de paramètre p dont on donnera l'espérance et la variance.

- Tout d'abord, comme d'après 1, $X(\Omega) = [\![s\,;+\infty[\![$, on en déduit $Y(\Omega) = [\![1\,;+\infty[\![= \mathbb{N}^*$.

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(X-s+1=k) \\
&= P(X=k+s-1) \\
&= p(1-p)^{k+s-1-s} && \text{question précédente} \\
&= p(1-p)^{k-1}.
\end{aligned}$$

On reconnaît donc que $\boxed{Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

- Enfin, d'après le cours, comme $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, on a directement $\boxed{E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$.

4. En déduire l'espérance et la variance de X.

- Par linéarité de l'espace, on a $E(X) = E(Y+s-1) = E(Y)+s-1 = \boxed{\frac{1}{p}+s-1}$.
- Pour la variance, on sait que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et toute variable aléatoire Z admettant une variance, $V(aZ+b) = a^2V(Z)$ donc $\boxed{V(X) = 1^2V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$.

On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d. Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue. La distance à l'objectif est donc $|X - d|$.

5. *Simulation* : recopier et compléter le programme en Python suivant pour simuler notre stratégie.

```python
def Bernoulli(q: float) -> bool:
    return random() < q

def distance(s: int, d: int, p: float) -> int:
    X = s                       # On commence à chercher au numéro s
    while Bernoulli(1-p):       # Tant que la place n'est pas libre
        X = X + 1               # On avance
    return abs(X - d)           # Distance à l'objectif
```

La fonction `Bernoulli` simule une variable de Bernoulli Y. La variable q correspond au paramètre de la variable de Bernoulli Y. Elle renvoie un booléen qui vaut `True` si $Y = 1$ et `False` si $Y = 0$.

La fonction `distance` simule notre stratégie. Les variables `s`, `d` et `p` correspondent aux valeurs introduites précédemment. Elle renvoie un entier représentant la distance à parcourir en sortant de la voiture.

Exercice 2. Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ (*d'après CCINP 2021*)

On dit qu'une variable aléatoire X sur l'espace probabilisé (Ω, P) suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad P(X = -1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

On admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

Le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-\mathrm{i}$).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$ que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n. Ainsi A_n prend ses valeurs dans $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait D_n suit une loi de Rademacher.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}D_n}\, A_n$.

On obtient la valeur de A_{n+1} à partir de celle de A_n :

- soit par une rotation dans le sens trigonométrique et dans ce cas $A_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\, A_n$ (cf résultat donné dans l'énoncé à propos des rotations) ;

- soit par une rotation dans le sens inverse et dans ce cas $A_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{2}} A_n$ (idem).

Or la variable aléatoire D_n prend la valeur 1 si la rotation a lieu dans le sens trigonométrique et -1 dans le sens inverse d'où $\boxed{A_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}D_n} A_n}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la variable D_n et le fait que $\{(A_n = 1), (A_n = \mathrm{i}), (A_n = -1), (A_n = -\mathrm{i})\}$ est un système complet d'événements de Ω, justifier que :

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = \mathrm{i}) + \frac{1}{2}P(A_n = -\mathrm{i}).$$

D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements donné par l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = 1) = P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = 1]) + P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = \mathrm{i}]) + \\ P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = -1]) + P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = -\mathrm{i}]). \end{aligned}$$

Or l'événement $A_{n+1} = 1$ est incompatible avec les événements $A_n = 1$ et $A_n = -1$ puisque l'aiguille tourne d'exactement un quart de tour à chaque étape. Il reste donc

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = 1) &= P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = \mathrm{i}]) + P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = -\mathrm{i}]) \\ &= P(A_n = \mathrm{i})P(A_{n+1} = 1 \mid A_n = \mathrm{i}) + P(A_n = -\mathrm{i})P(A_{n+1} = 1 \mid A_n = -\mathrm{i}) \\ &= P(A_n = \mathrm{i})P(D_n = -1) + P(A_n = -\mathrm{i})P(D_n = 1) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}P(A_n = \mathrm{i}) + \frac{1}{2}P(A_n = -\mathrm{i})}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justifier, exprimer avec des formules analogues, $P(A_{n+1} = \mathrm{i})$, $P(A_{n+1} = -1)$ et $P(A_{n+1} = -\mathrm{i})$.

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = \mathrm{i}) &= \frac{1}{2}P(A_n = 1) + \frac{1}{2}P(A_n = -1) \\ P(A_{n+1} = -1) &= \frac{1}{2}P(A_n = \mathrm{i}) + \frac{1}{2}P(A_n = -\mathrm{i}) \\ P(A_{n+1} = -\mathrm{i}) &= \frac{1}{2}P(A_n = 1) + \frac{1}{2}P(A_n = -1) \end{aligned}$$

On note la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

4. Sans calcul, justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

La matrice M est symétrique et réelle donc, d'après le théorème spectral, $\boxed{M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}}$.

5. La matrice M est-elle inversible ?

Deux colonnes de la matrice M sont identiques donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

6. Montrer que -1 est valeur propre de M.

Méthode 1 : On a

$$\chi_M(-1) = \det(-\mathrm{I}_4 - M) = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

où l'on a d'abord sommé toutes les colonnes dans la première puis soustrait la première ligne aux autres. En sommant les deuxième et quatrième lignes, on obtient une ligne identique à la troisième et donc un déterminant nul. Autrement dit $\chi_M(-1) = 0$, *i.e.* $\boxed{-1 \text{ est valeur propre de } M}$.

Méthode 2 : on s'inspire de la question suivante en montrant que le vecteur non nul $u = (1, -1, 1, -1)$ vérifie $Mu = -u$, *i.e.* -1 est valeur propre de M (et u est un vecteur propre associé).

7. Montrer que le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Notons v le vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1. Par produit matriciel, on a directement $Mv = v$, *i.e.* $\boxed{v \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

8. ★ Déterminer une base de l'image de M puis montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ grâce aux dimensions des sous-espaces propres.

- Par définition, l'image de M est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de M, *i.e.*

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Ces deux vecteurs constitue une famille libre (faire le calcul) donc $\boxed{\text{ils forment une base de } \mathrm{Im}(M)}$.

- En particulier, $\mathrm{Im}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. Or, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}(M)) + \dim(\mathrm{Im}(M))$ d'où $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 2$, ce qui signifie que 0 est valeur propre de M de multiplicité au moins 2.

Ainsi, d'après les deux questions précédentes et ci-dessus, on a obtenu que -1, 1 et 0 sont valeurs propres de M avec 0 de multiplicité au moins 2. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, on a toutes les valeurs propres et pour chacune la multiplicité est égale à la dimension de l'espace propre, d'où $\boxed{M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}}$.

9. Soit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = \mathrm{i}) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -\mathrm{i}) \end{pmatrix}$. On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est, c'est-à-dire $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Expliquer la démarche, sans mener les calculs, pour obtenir une expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$ des probabilités $P(A_n = 1)$, $P(A_n = \mathrm{i})$, $P(A_n = -1)$ et $P(A_n = -\mathrm{i})$.

D'après les questions 2 et 3, on a $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le cours (ou une récurrence facile) on obtient $\boxed{U_n = M^n U_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

Pour calculer M^n, on commence par diagonaliser M, *i.e.* déterminer des matrices D diagonale et P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. En pratique, D contient sur sa diagonale les valeurs propres (0 deux fois, 1 et -1) et les colonnes de P sont des vecteurs propres correspondant (par exemple celui déterminé en 7 pour 1).

On a alors $\boxed{M^n = PD^nP^{-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$ et le calcul de D^n est aisé : comme D est diagonale, il suffit d'élever les coefficients diagonaux à la puissance n.

Finalement, $\boxed{U_n = PD^nP^{-1}U_0}$ et un simple produit matriciel, après inversion de P, permet d'obtenir les expressions recherchées.